

TENTAMEN

|  |  |
| --- | --- |
| Kursnummer: | HF0024  Matematik för basår II |
| Moment: | TENB |
| Program: | Tekniskt basår |
| Rättande lärare: | Niclas Hjelm & Erik Melander |
| Examinator: | Niclas Hjelm |
| Datum:  Tid: | 2020-06-05  08:00-12:00 |
| Hjälpmedel: | Formelsamling: Björk m fl ”Formler och tabeller” **utan anteckningar**, passare, gradskiva, penna, radergummi och linjal  **Miniräknare är ej tillåten!** |
| Omfattning och betygsgränser: | |  |  | | --- | --- | | **Poäng** | **Betyg** | | 11 | Fx | | 12 – 14 | E | | 15 – 17 | D | | 18 – 20 | C | | 21 – 23 | B | | 24 – 26 | A |   **Till samtliga uppgifter krävs fullständiga lösningar. Lösningarna skall vara tydliga och lätta att följa. Införda beteckningar skall definieras. Uppställda samband skall motiveras.**  **Skriv helst med blyertspenna!**  Svaret ska framgå tydligt och vara förenklat så långt som möjligt. Svara med enhet och lämplig avrundning på tillämpade uppgifter. Svara exakt på övriga uppgifter, om inte annat anges. |

1. I en aritmetisk talföljd är det tionde elementet 6 och det tjugonde elementet är 10. Bestäm en explicit formel för denna aritmetiska talföljd. (2p)

2. Lös följande ekvation , där z är ett komplext tal. (2p)

3. Lös följande differentialekvation: . (2p)

4. Kurvan , linjen  och y-axeln innesluter ett område i första kvadranten. Detta område får rotera runt y-axeln. Bestäm volymen av den rotationskropp som då bildas. (2p)

5. Lös följande ekvation:  (2p)

6. Lös följande differentialekvation , där  och . (2p)

7. Volymen av en kub minskar med den konstanta hastigheten 3,6 cm3/s. Hur snabbt minskar kantens längd då kubens volym är 8,0 cm3 ? (2p)

8. Tredjegradspolynomethar tre nollställen, ,och . Dessutom gäller att. Bestäm polynomet. Svara på formen , där a, b c, och d är konstanter. (2p)

9. Låt  vara funktionen . Bestäm den primitiva funktion  till  för vilken gäller att . (2p)

10. Lös följande differentialekvation , med villkoren  och . (3p)

11. Ett kemiskt ämne S, som inte finns i blodet från början, tillförs blodet intravenöst med den konstanta hastigheten 26 mg/h. Ämnet S bryts ned med en hastighet som (i varje ögonblick) är 5,0 % av den aktuella mängden av ämnet S i blodet.

a) Låt  vara mängden av ämnet S i blodet som funktion av tiden , räknad från den tidpunkt ämnet S började tillföras. Bestäm . (2p)

b) Hur mycket av ämnet S finns i blodet efter lång tid? (1p)

12. Potenslagarna är desamma för icke-reella tal, som för reella tal. T ex gäller att , där  och  är godtyckliga reella tal. Använd denna lag för att visa de två satserna:

*  (additionssatsen för sinus)
* och  (additionssatsen för cosinus).

(2p)

**Lösningsförslag**

1. För en aritmetisk talföljd gäller: , d.v.s differensen, d, mellan ett element i talföljden och det närmast föregående elementet, är densamma oberoende av vilket element i talföljden man väljer.

Det är givet att  och .





Första elementet: 

Formel för denna talföljd: 

(Formeln kan också skrivas rekursivt: , )

**Svar:** Talföljdens formel,  eller , .

2. 







**Svar:** 

Alternativ lösning: Sätt . Insättning i ekvationen samt identifiering av real- och imaginärdelar i vänster led med motsvarande i höger led ger:

, vilket ger 

3. Inhomogen 1:a ordningens d.e.

Homogen lösning: 

Partikulärlösning till d.e. : Ansats: 



Allmän lösning är 

**Svar:** 

4. Skivmetoden vid rotation kring y-axeln:

Rotationskroppens volym

****

Området som roterar ligger mellan y = 1 (kurvans minpunkt) och y = 4.



**Svar:** Volymen är 

Alternativ lösning: Skalmetoden:



Innersta skalet vid y-axeln, d.v.s x = 0 och yttersta skalet där 





5. 

Gå över till polär form: 



V.L. = H.L. innebär att beloppen är lika, och att argumenten är lika, sånär som på multipler av 2π.

  

Det blir fyra olika lösningar, för n = 0,1,2,3:









**Svar:** Denna ekvation har fyra olika komplexa lösningar, se ovan.

6. Ekvationen är separabel. 



 (inga beloppstecken behövs eftersom x och y är positiva)

 (där D är en positiv konstant)

Villkoret används:  

**Svar:** 

7. Kubens volym är , där a är längden av kubens kant.

 



Kedjeregeln: 



**Svar:** Kantens längd minskar med 0,30 cm/s.

8. Faktorsatsen ger att 

, där k är en konstant.

Villkor: 



**Svar:**  

9. Detta löses med partiell integration () 2 ggr.



Villkoret ger: 







**Svar:** 

10. Inhomogen 2:a ordningens d.e.

Homogen lösning: Karakteristisk ekvation: , med lösningarna 

Ger att 

Partikulärlösning: Ansats , , 

Insättning i ekvationen 

 med lösning  

Allmän lösning: 

Villkor används: 





 Ledvis addition ger att  och 



Partikulärlösningen som uppfyller givna villkor är: 

**Svar:** 

11. Differentialekvation för y(t): , 



Inhomogen ekvation. Homogen lösning: 

Partikulärlösning: Ansats: , 





Allmän lösning: 

Villkoret tillämpas: 



Exponentialfunktionen är avtagande eftersom koefficienten framför t är negativ.

Efter lång tid är  och  mg.

**Svar:** a) mg, b)  mg efter lång tid.

12. 

Utveckla leden längst till vänster och längst till höger med Eulers formel ():









Det gäller alltså att:



Likheten innebär att realdelarna är lika för sig och imaginärdelarna för sig:

 (additionssatsen för cosinus)

 (additionssatsen för sinus)

Additionssatserna har alltså härletts från det givna potenssambandet, för godtyckliga reella tal,  och !

**Svar:** Se ovan

**Rättningsmall**

**Generell rättningsmall**

1. Varje beräkningsfel -1 poäng  
   (Därefter fortsatt rättning enligt nya förutsättningar)
2. Beräkningsfel; allvarliga och/eller leder till förenkling -2 poäng eller mer
3. Prövning istället för generell metod - samtliga poäng
4. Felaktiga antaganden/ansatser - samtliga poäng
5. Antar numeriska värden - samtliga poäng
6. Lösning svår att följa och/eller Svaret framgår inte tydligt -1 poäng eller mer  
   (Vid flera svar väljs det minst gynnsamma. Svara antingen avrundat eller exakt, se nedan.)
7. Matematiska symboler används felaktigt/saknas -1 poäng eller mer  
   Bl.a Om ’=’ saknas (t.ex. ’=>’ används istället) -1 poäng/tenta  
   Om ’=’ används felaktigt (t.ex. istället för ’=>’) -1 poäng/tenta

Teoretiska uppgifter:

1. Avrundat svar -1 poäng/tenta

Tillämpade uppgifter:

1. Enhet saknas/fel -1 poäng/tenta
2. Avrundningar i delberäkningar som ger fel svar -1 poäng/tenta
3. Svar med felaktigt antal värdesiffror ( ±1 värdesiffra ok) -1 poäng/tenta
4. Andra avrundningsfel -1 poäng/tenta
5. Exakt svar -1 poäng/tenta

**Preliminär rättningsmall**

1.Svarar med  -0p

Anger ej  -0p

Visar k med prövning -2p

2.Ansätter  och får  +1p

3. Rätt lösning till homogen d.e. +1p

4. Gränserna ej analytiskt bestämda, eller visade i figur. -1p

Fel integrand -2p

5.Fel vid bestämning av belopp -1p

Fel vid bestämning av argument -1p

Korrekt för övrigt, men svarar med fler eller färre än fyra lösningar -1p

Påstår att  -1p

6. Fel konstant -1p

Konstant saknas -2p

Felaktigt använd logaritmlag/felaktigt använd potenslag -2p

7. Fel enhet -1p

Minskar med – 0,30 -1p

8.k felaktigt bestämd eller saknas. -1p

Korrekt uppställt ekvationssystem (4 ekv, 4 obekanta) +1p

Rätt polynom, men svarar på fel form (t.ex. ) -1p

9. Korrekt primitiv funktion, men C ej bestämd/felaktigt bestämd +1p

Fel primitiv funktion med två konstanter Cx+D. -2p

10. Fel konstantbestämning -1p

Fel lösning homogen d.e. -1p

Fel lösning inhomogen d.e. -1p

11. y(t) korrekt beräknad (även konstanten) +2p

12. En i grunden korrekt härledning med oklarhet/dålig motivering i något enstaka led -1p